

### Általános célok

Ez a tantervi elem a matematika főiskolai-egyetemi tanulására való felkészítést célozza meg. A problémamegoldó készségen túl fontos az önálló rendszerezés, lényegkiemelés, történeti áttekintés készségének kialakítása, az alkalmazási lehetőségek megtalálása, a kapcsolatok keresése különböző témakörök között.

Ebben az időszakban áttekintését adjuk a korábbi évek ismereteinek, eljárásainak, problémamegoldó módszereinek, miközben sok új kiegészítő ismerettel bővítjük azokat, gyakorlati területen széles körben használható tudást közvetítünk, amelyek kissé összetettebb problémák megoldását is lehetővé teszik. Minden témában hangsúlyosan kell kitérnünk a gyakorlati alkalmazásokra, az ismeretek más tantárgyakban való felhasználhatóságára.

A matematika tantárgy a Nemzeti alaptantervben rögzített kulcskompetenciákat az alábbi módon fejleszti:

**A tanulás kompetenciái:** A matematika tanulása során elengedhetetlen a tananyag alapos és átfogó megértése. A szöveges feladatok megoldása fejleszti az értő olvasás és a releváns információk kiválasztásának készségét. Az általánosítás és az analógiák adekvát használata, több szempont egyidejű figyelembevétel, a rendszerezési képesség, a megszerzett tudás új helyzetekben való alkalmazása elősegítik az aktív, önirányított tanulás kompetenciáinak kialakítását, fenntartását, megerősítését. A matematika tantárgy a matematikai logika és az algoritmikus gondolkodás fejlesztésével, az ok-okozati összefüggések megláttatásával hozzájárul a többi tantárgy tanulásához szükséges rendszerező, összefüggéseket felismerő, ezáltal hatékony önálló tanulási módszerek elsajátításához és megfelelő alkalmazásához is.

**A kommunikációs kompetenciák:** A matematika fejleszti a tanuló azon képességét, hogy világosan, röviden és pontosan fejezze ki gondolatait. A matematika tanulása során fokozatosan alakul ki a tanuló érvelési és vitakészsége. A szöveges problémák megoldása javítja a szöveg megértésének készségét: a tanulónak meg kell keresnie az információkat és fel kell ismernie egy adott információ jelentőségét a probléma megoldása során. A matematika tanulási folyamatában kialakul a különböző módon (szöveg, grafikon, táblázat, diagram és képlet) bemutatott tartalmak megértésének és alkotásának készségrendszere.

**A digitális kompetenciák:** A matematika tanulása során hangsúlyos szerepet kap a problémamegoldás és az algoritmikus gondolkodás, melyek elősegítik a tanuló digitális kompetenciáinak fejlesztését. A különböző matematikai tárgyú szoftverek, alkalmazások, applikációk és játékok alkalmazásán keresztül a matematika tanulása hozzájárul a tanuló digitális kultúrájának kialakításához.

**A matematikai, gondolkodási kompetenciák:** A matematika tanulása során a tanuló gondolkodásának fejlesztése elsősorban konkrét problémák megoldásán keresztül történik. A tanuló előzetes tudása és tapasztalata alapján azonosítja a problémákat, majd ismert matematikai fogalmakra támaszkodva stratégiát dolgoz ki ezek megoldására. Elfogadja, hogy a megoldás több különböző úton is elképzelhető, illetve találkozik olyan nyitott problémákkal is, amelyeknek több megoldása is lehetséges. Kellő kitartással próbál ki különböző matematikai módszereket, és felismeri azokat a problémákat is, amelyeknek nincs megoldása.

A tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése többek között a feladatok megoldása során kapott eredmények elemzésén és értékelésén keresztül történik. A tanuló megtanul induktív úton példákat általánosítani és deduktív érvelést használni a matematikai állítások bizonyítására.

**A személyes és társas kapcsolati kompetenciák:** A matematika tanulása fejleszti a kitartás, a pontosság, a figyelem és a fegyelmezettség képességét. A matematika tanulásán keresztül erősödik a tanuló felelősségtudata, gazdagodik az önképe, fejlődik a kooperációs készsége. A tanuló

matematikai ismereteit alkalmazni tudja az egyéni célok eléréséhez szükséges tervezésben, az életét befolyásoló döntései megalapozásában és meghozatalában, a várható következmények mérlegelésében. A matematika tanulása elősegíti annak belátását, hogy a személyes erősségekre építeni, a hibákból pedig tanulni lehet.

A tanuló a matematikai foglalkozások során megtanulja, hogyan oszthatja meg ötleteit másokkal, és hogyan segítheti társait a matematikai fogalmak megértése vagy azok alkalmazása során. Felelősséget vállal a közösen kitűzött feladatok elvégzéséért, s megtanulja tisztelni mások álláspontját, gondolkodásmódját.

**A kreativitás, a kreatív alkotás, önkifejezés és kulturális tudatosság kompetenciái:** A matematika olyan tudomány, amely összeköti a különböző kultúrákat. A tanuló megismeri a gondolkodás logikai felépítésének eleganciáját, a matematikának a természethez, a művészetekhez és az épített környezethez fűződő viszonyát.

A tanuló konkrét vagy képi reprezentációval vagy szimbolikus modellekkel végzi a matematikai gondolatok vagy kapcsolatok feltárását, majd új kapcsolatokat alakít ki a matematikai fogalmak között.

**Munkavállalói, innovációs és vállalkozói kompetenciák:** A kompetencia fejlesztése valódi adatok felhasználásával összeállított mindennapi problémák megoldásán keresztül történik. Ennek során a különböző megoldási lehetőségek keresése fejleszti a gondolkodás rugalmasságát és az új ötletek megalkotásának képességét. A tanuló megfelelő játékokon keresztül képessé válik a különböző kockázatok felmérésére, a számára kedvezőnek tűnő stratégia kidolgozására, és megtapasztalja döntései következményét. A matematikai projekteken való részvétel segíti a későbbi munkavállalás szempontjából fontos készségek kialakulását (kreativitás, problémamegoldás, kezdeményezőkézség, másokkal való együttműködés készsége).

### 11-12. évfolyam

A 11–12. évfolyamon a tanulási-tanítási folyamatra jellemző, hogy az ismeretek jellege egyre absztraktabb és formálisabb, a matematika belső logikája egyre jobban érvényesül. Ebben a szakaszban az egyik nagyon fontos didaktikai cél a szimbolikus gondolkodás fejlesztése. A tanulóknak a korábban elsajátított készségekre, képességekre és ismeretanyagra támaszkodva kell eljutniuk az absztrakt összefüggések megértéséhez és tudatos alkalmazásához. Tudatosítani kell a matematikai fogalmak pontos definiálásának fontosságát és a matematikai bizonyítások szerepét. Amellett, hogy a lehetséges alkalmazásokat minden egyes témakör kapcsán szem előtt kell tartani, fontos, hogy a tanulók lássák az egyes matematikai területek kapcsolatát is.

Ebben a szakaszban is fontos cél, hogy az ismeretszerzési folyamat során a tanuló a tanár által irányított módon, a feladatok megoldása mentén maga fedezze fel az összefüggéseket, általánosítási lehetőségeket, megoldási módokat. A kooperatív munkaformák, a csoportmunkában megoldandó projektfeladatok ebben a szakaszban is fejlesztik a matematikai kommunikációt. Az érettségi vizsgára készüléskor egyre nagyobb hangsúlyt kap a tanulók önálló munkája mind a feladatmegoldásokban, mind a tanultak ismétlésében, rendszerezésében. A digitális eszközök, dinamikus szoftverek, online felületek támogatják a szemléltetést, a megértést, a felfedeztetést és a gyakorlást.

A 11–12. évfolyamon is jellemző, hogy a megjelenő témakörök tartalmának egy része folytatása, kiterjesztése és kiegészítése a korábbi szakaszokban is megjelenő tananyagtartalmaknak. Bizonyos témakörök azonban ebben a szakaszban jelennek meg először. Ilyen a racionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény, a logaritmus, a számtani és mértani sorozatok, a trigonometria, a koordinátageometria, a térgeometria és a függvényanalízis. Vannak olyan témakörök, amelyek ismeretei megjelennek más terület tanítása során is, ezért az egyes részekhez javasolt óraszámok ebben a szakaszban sem jellemeznek feltétlenül időben összefüggő egységet. Az algebrai eszközök és a függvényekkel kapcsolatos ismeretek bővülése, a trigonometria és a koordinátageometria

alapjainak megjelenése, valamint a statisztikai és valószínűségi szemlélet mélyülése további lehetőségeket nyújt változatos hétköznapi és matematikai problémák megoldására. A matematikai eszköztár bővülése ebben a szakaszban teszi leginkább lehetővé, hogy a tanulók más tantárgyakban, más tanulási területeken is alkalmazzák matematikai tudásukat.

**A tanterv a 2017 május-júniusi vizsgaidőszaktól érvényes érettségi vizsgakövetelmények alapján készült.**

A 11–12. évfolyamon az **emelt érettségire felkészítő** óraszám: 134 óra.

**Témakörök áttekintő táblázata:**

Témakör neve	Összes óraszám
<b>Halmazok, matematikai logika</b>	6
<b>Kombinatorika, gráfok</b>	6
<b>Számelmélet, algebrai átalakítások, egyenletek</b>	14
<b>Hatvány, gyök, logaritmus</b>	4
<b>Exponenciális folyamatok vizsgálata</b>	2
<b>Sorozatok</b>	22
<b>Függvények és az analízis elemei</b>	38
<b>Trigonometria</b>	14
<b>Koordinátageometria</b>	8
<b>Térgeometria</b>	4
<b>Statisztika</b>	2
<b>Valószínűség-számítás</b>	4
<b>Rendszerező összefoglalás</b>	10
<b>Összes óraszám:</b>	134

**Témakör: Halmazok, matematikai logika**

**Óraszám: 6 óra**

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

**A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Ismerje és alkalmazza a de Morgan azonosságokat
- Tudja alkalmazni a logikai szita módszerét egyszerűbb esetekben.
- Ismerjen példát véges, megszámlálhatóan végtelen és nem megszámlálhatóan végtelen halmazra.
- Ismerje a megszámlálhatóan végtelen halmaz definícióját.
- Bizonyítsa egyszerűbb esetekben, hogy egy halmaz számossága megszámlálhatóan végtelen.
- Ismerje az alábbi bizonyítási típusokat és tudjon példát mondani alkalmazásukra: direkt és indirekt bizonyítás, skatulyaelv, teljes indukció.
- Tudja megfogalmazni konkrét esetekben tételek megfordítását

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése.
- Számhalmazok. Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a valós számokig
- Halmazok számossága.

- Végtelen és véges halmazok.
- Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok.
- Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések.
- Logikai műveletek, tulajdonságaik.
- Relációk és relációtulajdonságok.
- Bizonyítási módszerek áttekintése.
- Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula,
- skatulya elv, teljes indukció. Tételek megfordítása.
- Matematikatörténet: Cantor, Hilbert, Gödel

### **Fogalmak**

- logikai műveletek, reláció, indirekt bizonyítás, teljes indukció

### **Témakör: Kombinatorika, gráfok**

**Óraszám: 6 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Ismerje, bizonyítsa és alkalmazza a permutációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), variációk (ismétlés nélkül és ismétléssel), kombinációk (ismétlés nélkül) kiszámítására vonatkozó képleteket.
- Ismerje és alkalmazza a binomiális tételt.
- Ismerje a Pascal-háromszöget és alapvető tulajdonságait.
- Definiálja a következő fogalmakat: többszörös él, hurokél, út, kör, összefüggő gráf, egyszerű gráf, fa. Ismerje a fa pontjai és élei száma közötti összefüggést.
- Konkrét szituációkat szemléltessen és feladatokat oldjon meg gráfok segítségével.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Kombinatorika. (A korábbi ismeretek összegzése.)
- Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.
- Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.
- Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel.
- (Vegyes kombinatorikai feladatokon keresztül ismétlés, rendszerezés.)
- Binomiális együtthatók, tulajdonságaik.
- Pascal-háromszög és tulajdonságai.
- Binomiális tétel.
- Néhány kombinatorikus geometriai probléma.
- Gráfokra, éleikre, csúcsok fokszámaira vonatkozó egyszerű tételek.
- Gráfok alkalmazása leszámolásos feladatokban – rendszerező ismétlés.
- Matematikatörténet: Euler, Blaise Pascal

### **Fogalmak**

- Permutáció, variáció, kombináció, Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf).

### **Témakör: Számelmélet, algebrai átalakítások, egyenletek**

**Óraszám: 14 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Tudja megfogalmazni a számelmélet alaptételét.
- Bizonyítsa, hogy végtelen sok prímszám van.
- Tudjon összetett oszthatósági feladatokat megoldani.
- Tudja meghatározni természetes számok pozitív osztóinak számát
- Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből  $n$  alapú ( $n < 9$ ) számrendszerbe és viszont. Tudjon  $n$  alapú ( $n < 9$ ) számrendszerben felírt számokat összeadni és kivonni
- Adott  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) esetén tudja eldönteni, hogy  $\sqrt{n}$  irracionális szám-e. Bizonyítsa, hogy  $\sqrt{2}$  irracionális szám.
- Ismerje a polinom fokszámát, fokszám szerint rendezett alakját.
- Tudja alkalmazni feladatokban az  $a^n - b^n$ , illetve az  $a^{2n+1} + b^{2n+1}$  kifejezés szorzattá alakítását.
- Tudjon paraméteres elsőfokú egyenleteket megoldani. Tudjon elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszereket megoldani.
- Igazolja a másodfokú egyenlet megoldóképletét.
- Igazolja és alkalmazza a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket.
- Tudjon másodfokú paraméteres egyenleteket megoldani.
- Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenletrendszereket megoldani.
- Tudjon értelmezési tartomány, illetve értékészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatokat megoldani.
- Tudjon két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani.
- Tudjon összetett abszolútértékes egyenleteket algebrai úton megoldani.
- Tudjon összetett egyenleteket, egyenletrendszereket megoldani.
- Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenleteket megoldani.
- Tudjon összetett egyenlőtlenségeket és egyenlőtlenség-rendszereket megoldani.
- Tudjon egyszerű négyzetgyökös, abszolútértékes, exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenlőtlenségeket megoldani.
- Ismerje  $n$  szám számított középértékeit (számtani, mértani, négyzetes, harmonikus), valamint a nagyságrendi viszonyaikra vonatkozó tételeket.
- Bizonyítsa a számtani és mértani közép közötti összefüggést és tudjon megoldani feladatokat ez alapján.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Az  $a^n - b^n$ , illetve az  $a^{2n+1} + b^{2n+1}$  kifejezés szorzattá alakítása és alkalmazása
- Számelmélet alaptétele, osztók száma
- Összetett oszthatósági feladatok
- Számrendszerek
- Adott műveletekre zárt számhalmazok.  $\sqrt{2}$  irracionálisának bizonyítása
- Valós számok
- Nevezetes azonosságok
- Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek
- Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek
- Magasabb fokú egyenletek
- Négyzetgyökös egyenletek
- Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása a definíció és az azonosságok alkalmazásával.
- Exponenciális egyenltre vezető valós problémák megoldása.
- Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása a definíció és az azonosságok alkalmazásával.
- Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmusos egyenleteknél.
- Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek.

- Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek összegzése.
- Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek
- Középértékek, egyenlőtlenségek

## **Témakör: Hatvány, gyök, logaritmus**

**Óraszám: 4 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Ismerje a permanencia elvet. Tudja szemléletesen értelmezni az irracionális kitevőjű hatványt.
- Bizonyítsa a hatványozás azonosságait egész kitevő esetén.
- Bizonyítsa a négyzetgyökvonás azonosságait. Ismerje és alkalmazza a gyökvonás azonosságait.
- Bizonyítsa a szorzat, a hányados és a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságokat. Bizonyítsa a más alapú logaritmusra való áttérés szabályát.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- $n$ -edik gyök fogalma, azonosságai.
- A racionális kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságainak ismételése.
- Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel.
- A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra.
- Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.
- A logaritmus fogalma.
- Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.
- A logaritmus azonosságai.
- Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra.
- Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.
- A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.
- Matematikatörténet: Napier, Kepler. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása. Logaritmustáblázat.

### **Fogalmak**

- $n$ -edik gyök, racionális kitevőjű hatvány, exponenciális növekedés, csökkenés, logaritmus

## **Témakör: Exponenciális folyamatok vizsgálata**

**Óraszám: 2 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információkat kigyűjti, rendszerezi;
- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát.
- adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít;
- a problémának megfelelő matematikai modellt választ, alkot;
- a kiválasztott modellben megoldja a problémát;
- a modellben kapott megoldását az eredeti problémába visszahelyettesítve értelmezi, ellenőrzi, és az észszerűségi szempontokat figyelembe véve adja meg válaszát;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékészlet-vizsgálattal ellenőrzi;

- megold egyszerű, a megfelelő definíció alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Exponenciális folyamatok vizsgálata a természetben és a társadalomban
- Exponenciális egyenletre, egyenlőtlenségre vezető matematikai vagy hétköznapi nyelven megfogalmazott szövegből a matematikai tartalmú információk kigyűjtése, rendszerezése
- Adott problémához megoldási stratégia, algoritmus választása, készítése
- A gyakorlati (például pénzügyi, biológiai, fizikai, demográfiai, ökológiai) problémának megfelelő matematikai modell választása, alkotása
- A kiválasztott modellben a probléma megoldása
- A modellben kapott megoldás értelmezése az eredeti probléma szövegébe visszahelyettesítve, ellenőrzés és válaszadás az észszerűségi szempontokat figyelembe véve

### **Fogalmak**

Nincsenek új fogalmak.

### **Témakör: Sorozatok**

**Óraszám: 22 óra**

### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

#### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Tudjon sorozatot jellemezni (korlátosság, monotonitás).
- Ismerje a konvergencia szemléletes fogalmát.
- Ismerje és alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozat definícióját.
- Alkalmazza egyszerű sorozatokban a konvergens sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértékére vonatkozó tételeket.
- Bizonyítsa a számtani és a mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggéseket, valamint az összegképleteket.
- Ismerje a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.

### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása.
- Korábbi ismeretek rendszerező ismétlése.
- Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat.
- Rekurzív sorozat n-edik elemének megadása.
- Számtani sorozat és mértani sorozat
- Végtelen sorok, Végtelenen sor konvergenciája, összege.
- Végtelen mértani sor.
- Kamatos kamat, járadékszámítás
- Matematikatörténet: Fibonacci.
- Sorozatok konvergenciája.
- A határérték szemléletes és pontos definíciói.
- Műveletek konvergens sorozatokkal.
- Konvergens és divergens sorozatok.
- Konvergens sorozatok tulajdonságai.
- Torlódási pont.
- Konvergens sorozatnak egy határértéke van.

- Minden konvergens sorozat korlátos.
- Monoton és korlátos sorozat konvergens.
- Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek.

### Fogalmak

- Sorozat, számtani sorozat, mértani sorozat, kamatos kamat, rekurzív sorozat, monotonitás, torlódási pont, határérték, korlátosság, tőke, kamatláb, kamat, futamidő, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet

## Témakör: Függvények és az analízis elemei

### Óraszám: 38 óra

#### TANULÁSI EREDMÉNYEK

##### A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- Ismerje a függvénytan alapfogalmak pontos definícióját.
- Ismerje és alkalmazza a függvények összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának a fogalmát. Ismerje és alkalmazza a függvények megszorításának (leszűkítésének) és kiterjesztésének fogalmát.
- Ismerje és alkalmazza az inverzfüggvény fogalmát.
- Ismerje az összetett függvény fogalmát, képzésének módját.
- Ismerje és tudja ábrázolni az  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) függvényt.
- Ismerje és tudja ábrázolni a trigonometrikus függvényeket
- Tudjon az alapvető függvényekből összetett függvényeket képezni.
- Tudja ábrázolni az alapvető függvények transzformáltjainak grafikonját ( $c \cdot f(ax + b) + d$ ).
- Tudja jellemezni a függvényeket korlátosság szempontjából.
- Tudja meghatározni a függvények tulajdonságait az alapfüggvények ismeretében, transzformációk segítségével.
- Használja a konvexitás és konkavitás fogalmát a függvények jellemzésére.
- Tudjon másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatokat megoldani.
- Ismerje a végesben vett véges, a végtelenben vett véges és a tágabb értelemben vett határérték szemléletes fogalmát. Ismerje a folytonosság szemléletes fogalmát.
- Tudja a differencia- és differenciálhányados definícióját. Alkalmazza az összeg-, a különbség-, a konstansszoros, a szorzat- és a hányadosfüggvény deriválási szabályait.
- Alkalmazza egyszerű esetekben az összetett függvény deriválási szabályát.
- Tudja bizonyítani, hogy  $(x^n)' = nx^{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}$  esetén).
- Ismerje a trigonometrikus függvények deriváltját.
- Alkalmazza a differenciálszámítást érintő egyenletének felírására, szélsőérték-feladatok megoldására és polinomfüggvények vizsgálatára (monotonitás, szélsőérték, konvexitás).
- Ismerje folytonos függvényekre a határozott integrál szemléletes fogalmát és tulajdonságait.
- Ismerje a kétoldali közelítés módszerét, az integrálfüggvény fogalmát, a primitív függvény fogalmát, valamint a Newton-Leibniz-tételt.
- Tudja polinomfüggvények, illetve a szinusz és koszinusz függvény grafikonja alatti területet kiszámolni.

#### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A trigonometrikus függvények.
- A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékészlete, zérus-helyek, szélsőérték, periódus, monotonitás.
- A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat
- Az exponenciális függvény.



- Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.
- A logaritmusfüggvény.
- A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.
- Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.
- Inverz függvénykapcsolat.
- Hatvány és gyökfüggvény ábrázolása, vizsgálata
- A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése.
- Korábbi ismeretek rendszerező ismételése.
- Függvény határértéke.
- A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések.
- Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke.
- A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata.
- A függvények folytonossága.
- Példák folytonos és nem folytonos függvényekre.
- A folytonosság definíciói.
- Intervallumon folytonos függvények.
- Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.
- (Bizonyítások nélkül, de ellenpéldákkal azokra az esetekre, ha az intervallum nem korlátos, nem zárt, illetve ha a függvény nem folytonos.)
- Bevezető feladatok a differenciálhányados fogalmának előkészítésére.
- A függvénygörbe érintőjének iránytangense.
- A pillanatnyi sebesség meghatározása.
- A differenciálhatóság fogalma.
- A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény.
- Példák nem differenciálható függvényekre is.
- Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.
- Alapfüggvények deriváltja:
- Konstans függvény,  $x^n$ , trigonometrikus függvények deriváltja.
- Műveletek differenciálható függvényekkel.
- Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg-, szorzat-, hányados-, összetett függvény deriváltja.
- Inverz függvény deriváltja.
- Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. (Bizonyítás nélkül.) Érintő egyenlete
- Magasabbrendű deriváltak.
- Matematikatörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass.
- A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.
- Lokális növekedés, fogyás - intervallumon monoton függvény.
- Szélsőérték - lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.
- Konvexitás vizsgálata deriválással. A konvexitás definíciója. Inflexió pont. A második derivált és a konvexitás kapcsolata.
- Függvényvizsgálat differenciálszámítással.
- Gyakorlati jellegű szélsőérték-feladatok megoldása.
- A differenciálszámítás és az elemi módszerek összevetése.
- Bevezető feladatok az integrál fogalmához.
- Függvény grafikonja alatti terület. A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület.
- A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.

- Alsó és felső közelítő összegek. Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása. Közelítés véges összegekkel. A határozott integrál fogalma, jelölése. A szemléletes megközelítésre alapozva eljutás a pontos definícióig. Negatív függvény határozott integrálja. A határozott integrál és a terület-előjeles terület. Az integrál közelítő kiszámítása.
- Számítógépes szoftver használata a határozott integrál szemléltetésére. Matematikatörténet: Bernhard Riemann.
- Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.
- Korlátos és monoton függvények integrálhatósága.
- A határozott integrál tulajdonságai.
- Az integrál mint a felső határ függvénye.
- Integrálfüggvény.
- Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja.
- Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.
- A primitív függvény fogalma.
- A primitív függvények halmaza - a határozatlan integrál:
  - hatványfüggvény, polinomfüggvény,
  - trigonometrikus függvények,
  - exponenciális függvény, logaritmusfüggvény.
- A Newton Leibniz-tétel.
- Matematikatörténet: Newton, Leibniz, Euler.
- Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra.
- Két függvénygörbe közötti terület meghatározása.
- Forgástest térfogatának meghatározása.

## Fogalmak

- Függvényfolytonosság, -határérték. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabbrendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény. Alsó- és felső közelítő összeg, határozott integrál. Primitív függvény, határozatlan integrál. Newton-Leibniz-tétel.

## Témakör: Trigonometria

**Óraszám: 14 óra**

### TANULÁSI EREDMÉNYEK

#### A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- Tudja hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszög oldalarányaival definiálni, ismereteit alkalmazza feladatokban.
- Tudja a szögfüggvények általános definícióját.
- Tudja és alkalmazza a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggéseket: pótszögek, kiegészítő szögek, negatív szög szögfüggvénye,
  - $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$
- Ismerje és alkalmazza a nevezetes szögek ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ) szögfüggvényeit.
- Ismerje és alkalmazza feladatokban a szinusz- és a koszinusztételt.
- Függvénytáblázat segítségével tudja alkalmazni egyszerű feladatokban az addíciós összefüggéseket ( $\sin(\alpha + \beta)$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ).

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Hegyesszögek szögfüggvényei derékszögű háromszögben, alkalmazásuk feladatokban.
- Szögfüggvények általánosítása
- Összefüggések a szögfüggvények között
- Nevezetes szögek szögfüggvényei
- A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével.
- A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével.
- Szinusztétel.
- Koszinusztétel.
- A tételek pontos kimondása, bizonyítása.
- Kapcsolat a Pitagorasz-tétellel.
- Általános háromszög adatainak meghatározása. Egyértelműség vizsgálata.
- Szög, távolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban is.
- Bizonyítási feladatok.
- Szögfüggvények közötti összefüggések.
- Addíciós tételek:
  - -két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,
  - -egy szög kétszeresének szögfüggvényei,
  - -félszögek szögfüggvényei,
  - -két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása.
- A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása.
- Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása.
- Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.
- Trigonometrikus egyenletek.
- Az összes megoldás megkeresése. Hamis gyökök elkerülése.
- Trigonometrikus egyenlőtlenségek.
- Grafikus megoldás vagy egységkör alkalmazása.
- Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata.
- Trigonometrikus kifejezések szélsőértékének keresése.

**Fogalmak**

Skaláris szorzat, szinusztétel, koszinusztétel, addíciós tétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet.

**Témakör: Koordinátageometria**

**Óraszám: 8 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Igazolja a szakasz felezőpontja és harmadoló pontjai koordinátáinak kiszámítására vonatkozó összefüggéseket.
- Tudja kiszámítani szakasz  $n:m$  arányú osztópontjának koordinátáit. Igazolja a háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggést.
- Tudja levezetni az egyenes egyenletét a síkban különböző kiindulási adatokból.
- Tudja síkbeli egyenesek hajlásszögét meghatározni.
- Tudja levezetni a kör egyenletét.
- Ismerje a kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolatát.

- Tudja meghatározni két kör kölcsönös helyzetét, metszéspontjait.
- Tudja felírni külső pontból húzott érintő egyenletét.
- Tudja levezetni a parabola  $x^2 = 2py$  alakú egyenletét.
- Tudjon feladatokat megoldani a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű parabolákkal.
- Bizonyítsa a háromszög területének kiszámítására használt képleteket
- Bizonyítsa nevezetes négyszögek és szabályos sokszögek területképleteit.
- Bizonyítsa a csonkagúla és a csonkakúp térfogatképletét.

### FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK

- A Descartes-féle koordinátarendszer.
- A helyvektor és a szabadvektor.
- Rendszerező ismétlés.
- Vektor abszolútértékének kiszámítása.
- Két pont távolságának kiszámítása.
- A Pitagorasz-tétel alkalmazása.
- Két vektor hajlásszöge.
- Skaláris szorzat használata.
- Szakasz osztópontjának koordinátái.
- A háromszög súlypontjának koordinátái.
- Elemi geometriai ismereteket alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása.
- Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens.
- A különböző jellemzők közötti kapcsolat értése, használata.
- Az egyenes egyenletei.
- -Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete.
- -Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszerében térben.
- -Íránytényező egyenlet.
- Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel.
- Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata.
- A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása.
- Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele.
- Két egyenes metszéspontja.
- Két egyenes szöge.
- Skaláris szorzat használata.
- A kör egyenlete.
- Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.
- Kör és egyenes kölcsönös helyzete.
- A kör érintőjének egyenlete.
- Két kör közös pontjainak meghatározása.
- Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.
- A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.
- Szerkeszthetőségi kérdések.
- A parabola tengelyponti egyenlete.
- A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.
- A parabola és a másodfokú függvény.
- Teljes négyzetté kiegészítés.
- A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete.
- A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.

**Fogalmak**

Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, kör, parabola egyenlete.

**Témakör: Térgeometria**

**Óraszám: 4 óra**

**TANULÁSI EREDMÉNYEK****A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- ismeri és feladatmegoldásban alkalmazza a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát és hajlásszögét;
- ismeri a mérés alapelvét, alkalmazza konkrét alap- és származtatott mennyiségek esetén;
- ismeri a hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő mértékegységeit és az átváltási szabályokat. Származtatott mértékegységeket átvált;
- sík- és térgeometriai feladatoknál a problémának megfelelő mértékegységben adja meg válaszát;
- ismeri és alkalmazza a hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságait;
- lerajzolja a kocka, téglatest, egyenes hasáb, egyenes körhenger, egyenes gúla, forgáskúp hálóját;
- kiszámítja a speciális testek felszínét és térfogatát egyszerű esetekben;
- ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket;
- ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket.

**FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- A területszámítás alapelvei.
- Néhány egyszerűbb alakzat területének levezetése az alapelvekből. Térelemek kölcsönös helyzetének, távolságának és hajlásszögének ismerete, alkalmazása feladatmegoldásban
- A terület, térfogat, űrtartalom mértékegységeinek és ezek átváltási szabályainak ismerete
- Sűrűség mértékegységei közötti átváltás ismerete
- Sík- és térgeometriai feladatoknál a válasz megadása a problémának megfelelő mértékegységben
- A hasáb, a henger, a gúla, a kúp, a gömb, a csonkagúla, a csonkakúp (speciális testek) tulajdonságainak ismerete és alkalmazása a hétköznapi életben előforduló testekkel kapcsolatban
- A kocka, a téglatest, az egyenes hasáb, az egyenes körhenger, az egyenes gúla és a forgáskúp hálójának lerajzolása konkrét esetekben
- A mindennapi életben előforduló hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp alakú tárgyak felszínének és térfogatának meghatározása méréssel és számítással
- Síkidomok forgatásával keletkező egyszerű, a mindennapi életben is előforduló testek felszínének és térfogatának kiszámítása
- A hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- A hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételek ismerete és alkalmazása
- A területszámítás alapelvei.
- Néhány egyszerűbb alakzat területének levezetése az alapelvekből.
- A területszámítás módszereinek áttekintése.
- Területszámítási módszerek alkalmazása a matematika más témaköreiben. (Pl. geometriai bizonyításokban.)
- A térfogatszámítás alapelvei.
- Néhány egyszerűbb test térfogatának levezetése az alapelvekből.
- A térfogatszámítás áttekintése.
- A térfogatszámítás néhány új eleme.

- Csonkagúla térfogata.
- Alakzatok felszíne, hálója.
- Csonkakúp felszíne.
- Térgeometria elemei.
- Tetraéderekre vonatkozó tételek.
- (Van-e beírt, körülírt gömbje, súlypontja, magasságpontja?)
- Szabályos testek.

### **Fogalmak**

kocka, téglatest, hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp, egyenes test, forgástest, n-oldalú szabályos gúla, tetraéder, alaplap, oldallap, alapél, oldalél, alkotó, palást, testmagasság, test hálója

### **Témakör: Statisztika**

**Óraszám: 2 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- adott cél érdekében tudatos adatgyűjtést és rendszerezést végez;
- hagyományos és digitális forrásból származó adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- ismeri és alkalmazza a sodrófa (box-plot) diagramot adathalmazok jellemzésére, összehasonlítására;
- felismer grafikus manipulációkat diagramok esetén.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Statisztikai mintavétel.
- Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül.
- Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás.
- Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés.
- Reprezentatív minta, sodrófa (box-plot) diagram, minimum, maximum, kiugró adat, kvartilisek, terjedelem, szórás

### **Témakör: Valószínűség-számítás**

**Óraszám: 4 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: események egyesítésének, metszetének és komplementerének valószínűsége, feltételes valószínűség, függetlenség, függőség.
- Ismerje és alkalmazza a geometriai valószínűség modelljét.
- Tudja értelmezni a binomiális eloszlást (visszatevéses modell) és a hipergeometriai eloszlást (visszatevés nélküli modell). Tudjon ezek alkalmazásával konkrét valószínűségeket kiszámítani.
- Ismerje és tudja kiszámítani a várható értéket a diszkrét egyenletes és a binomiális eloszlás esetén.

#### **FEJLESZTÉSI FELADATOK ÉS ISMERETEK**

- Eseményalgebra.

- Kapcsolat a halmazok és a logika műveleteivel.
- Matematikatörténet: George Boole.
- Véletlen jelenségek megfigyelése.
- A modell és a valóság kapcsolata.
- Szerencsejátékok elemzése.
- Klasszikus valószínűségi modell.
- Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége.
- Kizáró események, független események valószínűsége.
- Feltételes valószínűség.
- Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján.
- Nagy számok törvénye. (Szemléletes tárgyalás képletek nélkül.)
- Geometriai valószínűség.
- A binomiális eloszlás (visszatevéses modell) és a hipergeometriai eloszlás (visszatevés nélküli modell) tulajdonságai és ábrázolása
- Várható érték, szórás fogalma és kiszámítása a diszkrét egyenletes és a binomiális eloszlás esetén.
- A binomiális eloszlás alkalmazása. A minta relatív gyakoriságának becslése a sokaság paraméterének ismeretében.
- Matematikatörténet: Pólya György, Rényi Alfréd.

### **Fogalmak**

események összege, események szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események, geometriai valószínűség, visszatevéses mintavétel, visszatevés nélküli mintavétel, várható érték

### **Témakör: Rendszerező összefoglalás**

**Óraszám: 10 óra**

#### **TANULÁSI EREDMÉNYEK**

##### **A témakör tanulása eredményeként a tanuló:**

- Ismereteit rendszerezi, alkalmazza az egyes témakörökben.
- gyakorol az emelt szintű érettségire: önállóan rendszerez, ismételi, kapcsolatokat keres különböző témakörök között.
- felkészül a felsőfokú oktatásra.